Magische Quadrate

V. Gerade Felderzahl

Für die Zusammenstellung von magischen Quadraten mit einer geraden Felderzahl wurde noch keine allgemeine und geeignete Regel gefunden. **Eine relativ einfache Methode gibt es nur für Quadrate, deren Felderzahl ohne Rest durch 16 teilbar ist**. Die Zahl der Felder dieser Quadrate ist durch 4 teilbar, d. h., die Seiten zählen 4, 8, 12 usw. Felder. Einigen wir uns, welche Felder wir als "einander entgegengesetzt" bezeichnen. Auf der folgenden Abbildung sind als Beispiel zwei entgegengesetzte Felderpaare abgebildet. Das eine Paar ist mit Kreuzen gekennzeichnet, das andere mit Kreisen.

			X		
O					
					O
		X			

Wir sehen also, wenn sich das Feld in der zweiten Reihe von oben auf der von links aus vierten Stelle befindet, so ist das ihm entgegengesetzte Feld in der zweiten Reihe von unten auf der von rechts aus vierten Stelle. Für den User ist es nützlich, sich in der Anordnung noch einiger entgegengesetzter Felderpaare zu üben. **Wir stellen fest, dass für Felder einer Diagonale sich entgegengesetzte Anordnungen auf der gleichen Diagonale befinden.** Die Methode der Zusammenstellung von Quadraten mit der genannten Felderzahl erklären wir am Beispiel eines 8 x 8 Felder-Quadrates. Man beginnt damit, dass in die Felder alle Zahlen von 1 bis 64 in der Reihenfolge eingetragen werden, wie die folgende Abbildung zeigt:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

In dem erhaltenen Quadrat ergeben die Diagonalen gleiche Summen - 260, genau die, welche im magischen Quadrat aus 8 x 8 Feldern auch sein müssen. Prüft es nach! Doch die Zeilen und Spalten dieses Quadrates haben andere Summen. So ergibt die erste oberste Zeile nur insgesamt 36, also um 224 weniger als gefordert ist (260 - 36). Die achte, die unterste Zeile, ergibt 484, also 224 mehr als erforderlich (484 - 260). Indem wir feststellen, dass jede Zahl der achten Zeile um 56 größer ist als die darüber, sich in der ersten Reihe befindenden Zahl und weiter, dass diese 224 = 4 x 56 ist, ziehen wir die Schlußfolgerung, dass man die Summen dieser Zeilen ausgleichen kann, wenn man die Hälfte der Zahlen aus der ersten Reihe mit den darunterliegenden Zahlen der achten Zeile austauscht. Zum Beispiel die Zahlen 1, 2, 3, 4 wechseln die Plätze mit den Zahlen 57, 58, 59, 60. Was über die erste und achte Zeile gesagt wurde, gilt auch für die zweite und siebente, dritte und sechste, überhaupt für jedes gleichweit vom oberen bzw. unteren Rand entfernte Zeilenpaar. Nachdem der Zahlenaustausch in allen Zeilen durchgeführt ist, haben wir ein Quadrat mit gleichen Summen der Zeilen. Es ist jedoch notwendig, dass auch die Spalten diese gleiche Summe aufweisen. Bei der ursprünglichen Zahlenanordnung könnten wir das mit ebensolchem Zahlenaustausch erreichen, wie wir ihn gerade mit den Zahlen der Zeilen vollzogen haben. Doch nunmehr, nach der Umstellung in den Zeilen, ist die Sache komplizierter geworden. Um schnell die Zahlen herauszufinden, die ausgetauscht werden müssen, gibt es folgendes Verfahren, das von Anfang an angewendet werden kann: Anstelle der zweifachen Umstellung - in den Zeilen und Spalten - tauscht man die Zahlen gegeneinander aus, die entgegengesetzt stehen (welche Zahlen entgegengesetzt sind, wurde auf der Seite zuvor erklärt). Diese eine Regel ist jedoch noch ungenügend - haben wir doch festgestellt, dass nicht alle Zahlen einer Reihe, sondern nur die Hälfte auszutauschen ist, während die restlichen Zahlen an ihren Plätzen verbleiben. **Welche der entgegengesetzt angeordneten Zahlen müssen denn nun ausgewechselt werden?** Auf diese Frage antworten folgende 4 Regeln:

1. Das magische Quadrat ist in vier quadratische Flächen zu untergliedern, wie es die nächste Figur darstellt:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

2. Im linken oberen Quadrat wird die Hälfte alle Felder mit Kreuzen versehen, und zwar so, dass in jeder Spalte und jeder Zeile dieses Quadrates genau die Hälfte aller darin enthaltenen Felder gekennzeichnet ist. Das kann man auf verschiedene Weise tun, zum Beispiel so, wie es auf der obigen Abbildung angeführt ist.
3. Im rechten oberen Quadrat werden die Felder mit Kreuzen versehen, die symmetrisch zu den im linken oberen Quadrat gekennzeichneten liegen.
4. Nunmehr brauchen die Zahlen in den angekreuzten Feldern ihre Plätze mit den entgegengesetzt liegenden Zahlen nur getauscht zu werden. **Im Ergebnis aller durchgeführten Umstellungen entsteht ein magisches Quadrat aus 64 Feldern, das folgendermaßen aussieht:**

64	2	3	61	60	6	7	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	47	46	20	21	43	42	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	23	22	44	45	19	18	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	58	59	5	4	62	63	1

Wir könnten jedoch auch mit vielen anderen Methoden die Felder im linken oberen Quadrat kennzeichnen, wobei Regel 2 beibehalten bliebe. **Man kann es zum Beispiel so, wie es auf der nächsten Abbildung zu sehen ist, tun:**

		X	X			X	X		
	X	X			X			X	
	X			X	X			X	
1			X	X		X	X		2
	X			X	X	X			
		X	X		X	X			
		X	X				X	X	
3	X			X			X	X	4

Der User findet zweifellos selbst noch viele Möglichkeiten zur Verteilung der Kreuzchen auf die Felder des linken oberen Quadrates. Mit der darauffolgenden Anwendung der Regeln 3 und 4 kann man noch mehrere magische Quadrate mit 64 Feldern zusammenstellen. Auf die gleiche Weise kann man magische Quadrate bauen, die aus 12 x 12, 16 x 16 usw. Feldern bestehen. Wir schlagen dem User vor, das selbständig zu tun.>