Kostenloses Mittagessen

10 junge Leute beschlossen, den Abiturabschluß mit einem kameradschaftlichen Mittagessen in einem Restaurant zu feiern. Als sich alle versammelt hatten und das erste Gericht aufgetragen war, gerieten sie über die Sitzordnung in Streit. Die einen schlugen vor, sich in alphabetischer Reihenfolge zu plazieren, die anderen nach dem Alter, wieder andere nach den erreichten Leistungen und noch andere nach der Größe usw.
Der Streit zog sich hin, die Suppe wurde kalt, und keiner setzte sich an den Tisch....
Der Kellner brachte sie zur Ruhe, indem er sich mit folgenden Worten an sie wandte:
"Meine jungen Freunde, laßt euren Zank. Setzt euch an den Tisch, und hört mir zu."
Alle setzten sich wahllos hin.
Der Kellner fuhr fort:
"Einer von euch mag aufschreiben, in welcher Anordnung ihr **jetzt** hier sitzt. Morgen kommt ihr wieder hierher zum Mittagstisch und setzt euch in anderer Reihenfolge. Übermorgen setzt ihr euch wieder in anderer Reihenfolge und so fort, solange ihr nicht alle möglichen Sitzordnungen durchprobiert habt. Kommt die Reihe daran, wieder so zu sitzen, wie ihr heute sitzt, dann, verspreche ich feierlich, beginne ich euch täglich kostenlos mit den ausgewähltesten Gerichten zu bewirten."
Der Vorschlag gefiel. Es wurde vereinbart, sich täglich in diesem Restaurant zu treffen und alle möglichen Sitzordnungen durchzuprobieren, um so bald als möglich die kostenlosen Mahlzeiten nutzen zu können.
Doch sie konnten diesen Tag nicht erleben. Und nicht etwa, weil der Kellner das Versprechen nicht hielt, sondern weil die Anzahl der möglichen Platzverteilungen überaus groß ist. Es gibt nicht mehr und nicht weniger als **3 628 800 Möglichkeiten**. Diese Anzahl von Tagen ergibt, wie unschwer zu errechnen ist, fast **10 000 Jahre!**
Es mag euch unwahrscheinlich vorkommen, dass sich 10 Personen in einer solchen großen Anzahl von verschiedenen Anordnungen plazieren können. Prüft die Rechnung selbst.
Vor allem gilt es zu lernen, wie die Zahl der Umstellungen bestimmt wird. Der Einfachheit halber beginnen wir die Rechnung mit einer geringen Zahl von Gegenständen, mit drei. Nennen wir sie **A, B** und **C**. Wir möchten wissen, wie oft man sie gegenseitig vertauschen kann.
Gehen wir so heran. Wenn wir zunächst den Gegenstand **C** beiseite lassen, so kann man die übrigen zwei nur in zwei Anordnungen aufstellen. Nun fügen wir **C** zu jedem dieser Paare hinzu. Wir können das auf dreierlei Art tun:

1. **C** hinter das Paar stellen;
2. **C** vor das Paar stellen;
3. **C** zwischen den beiden Gegenständen anordnen.

Andere Positionen für **C**, außer diesen drei, gibt es offensichtlich nicht. Doch da wir zwei Paare haben, **AB** und **BA**, so ergeben sich zusammen **2 x 3 = 6** Anordnungen.
Gehen wir weiter. Machen wir die Rechnung für vier Gegenstände: **A, B, C, D**.
Wiederum lassen wir zunächst einen Gegenstand, sagen wir **D**, beiseite. Doch mit den übrigen drei nehmen wir alle möglichen Umstellungen vor. Wir wissen bereits, dass ihre Anzahl sechs ist. In wie vielen Anordnungen kann man den vierten Gegenstand **D** zu jeder der sechs Positionen der drei Gegenstände hinzufügen? Offenbar kann man:

1. **D** hinter die drei stellen;
2. **D** vor die drei stellen;
3. **D** zwischen den ersten und den zweiten Gegenstand stellen;
4. **D** zwischen den zweiten und dritten Gegenstand stellen.

Insgesamt erhalten wir folglich **6 x 4 = 24** Positionen. Da **6 = 2 x 3** ist, und **2 = 1 x 2**, so kann man die Anzahl aller Anordnungen als Produkt von **1 x 2 x 3 x 4 = 24** darstellen.
Gehen wir gleichermaßen im Falle von fünf Gegenständen vor, erkennen wir, dass für sie die Anzahl der Anordnungen gleich **1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120**ist.
Für sechs Gegenstände **1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 720** usw.
Und nun zurück zu dem Fall der 10 Mittaggäste:
Die Zahl der hier möglichen Anordnungen ergibt sich, wenn wir uns die Mühe machen, das Produkt aus **1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10** zu errechnen.
Dann erhalten wir die oben genannte Zahl: **3 628 800**
Die Rechnung wäre komplizierter, wenn unter den **10** Speisegästen fünf Mädchen wären und sie es wünschen würden, stets zwischen zwei jungen Herren am Tisch zu sitzen. Obgleich die Anzahl der Anordnungen wesentlich geringer wird, ist das Ausrechnen ein wenig schwieriger.
Mag sich - gleichgültig wohin - ein junger Mann an den Tisch setzen. Die vier anderen können sich, so dass zwischen ihnen stets ein Platz für die Mädchen frei bleibt, in **1 x 2 x 3 x 4 = 24** verschiedenen Anordnungen setzen. Da es insgesamt **10** Stühle sind, kann sich der erste junge Mann in **10** Anordnungen plazieren. Also ist die Zahl aller möglichen Anordnungen für die jungen Männer **10 x 24 = 240**.
In wieviel verschiedenen Anordnungen können sich nun auf die freien Stühle zwischen den jungen Herren die **5** Mädchen setzen? Offensichtlich **1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120** Varianten.
Vereinigen wir jede der **240** Sitzanordnungen der jungen Männer mit jeder der **120** Sitzanordnungen der Mädchen, erhalten wir die Zahl der möglichen Platzverteilung: **240 x 120 = 28 800**
Diese Zahl ist um ein Vielfaches geringer als die vorhergehende und würde nicht ganz **79** Jahre erfordern. Würden die jungen Restaurantgäste **100 Jahre alt werden, könnten sie ein kostenloses Mittagessen erleben**. Wenn nicht von dem gleichen Kellner, dann von seinem Nachfolger.
Da wir nun Permutationen berechnen können, können wir auch bestimmen, wieviel unterschiedliche Anordnungen die Spielsteine im **Spiel mit 15** *) möglich sind. Mit anderen Worten, wir können die Zahl aller Aufgaben, die uns das Spiel zu stellen vermag, berechnen. Es ist leicht zu verstehen, dass die Berechnung auf die Bestimmung der Permutationszahl von **15** Gegenständen hinausläuft.
Wir wissen schon, dass dazu multipliziert werden muß: **1 x 2 x 3 x 4..... x 14 x 15**.
Die Ausrechnung ergibt: **1.307.674.365.000**, das ist mehr als eine Billion.
Die Hälfte dieser gewaltigen Zahl von Aufgaben ist nicht lösbar. Es gibt also, über **600 Milliarden unlösbare Stellungen** in diesem Spiel. Daraus erklärt sich teilweise die Begeisterungsepidemie für das **"Spiel mit 15"**, von der die Menschen erfaßt wurden, ohne zu vermuten, dass eine solche riesige Zahl nicht lösbarer Fälle existiert. Bemerken wir noch dazu, dass, wenn es denkbar wäre, den Spielsteinen jede Sekunde eine neue Stellung zu geben, so wären bei pausenloser Bestätigung während des ganzen Tages über **40 000 Jahre** nötig.
Beenden wir unsere Unterhaltung über die Permutationsanzahl mit einer Aufgabe aus dem Schulleben. In der Klasse sind **25 Schüler**.

In wieviel verschiedenen Anordnungen können sie auf den Bänken sitzen?
Der Lösungsweg für diese Aufgabe (für jene, die sich alles schon Gesagte zu eigen gemacht haben) ist ganz unkompliziert. Man muß **25** Zahlen: **1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x .... x 23 x 24 x 25** multiplizieren.
Die Mathematik kennt Methoden, viele Rechenoperationen zu verkürzen, doch Berechnungen in der Art wie eben angeführt, vermag sie nicht zu erleichtern. Es existiert kein anderer Weg, um diese Rechenoperation genau durchzuführen, als gewissenhaft alle diese Zahlen zu multiplizieren. Nur die geschickte Gruppierung der Multiplikatoren ermöglicht eine geringe Verkürzung der Rechenzeit. Das Ergebnis ist enorm; es besteht aus **26** Ziffern. Das ist eine Zahl, deren Größe unser Vorstellungsvermögen übersteigt.
Hier ist sie: **15.511.210.043.330.985.984.000.000**.
Von allen Zahlen, denen wir bisher begegnet sind, ist das natürlich die größte und ihr gebührt mehr als allen anderen das Recht, **"Riesenzahl"** genannt zu werden.
Die Zahl der kleinsten Tropfen in allen Ozeanen und Meeren des Erdballs ist bescheiden im Vergeich zu dieser riesenhaften Zahl.

---

*) Ein Spiel, was die Menschen früher, ähnlich wie die Leute heute beim Sudoku, begeisterte. Hierbei mußte stets ein freies Feld im rechten unteren Eck verbleiben.