

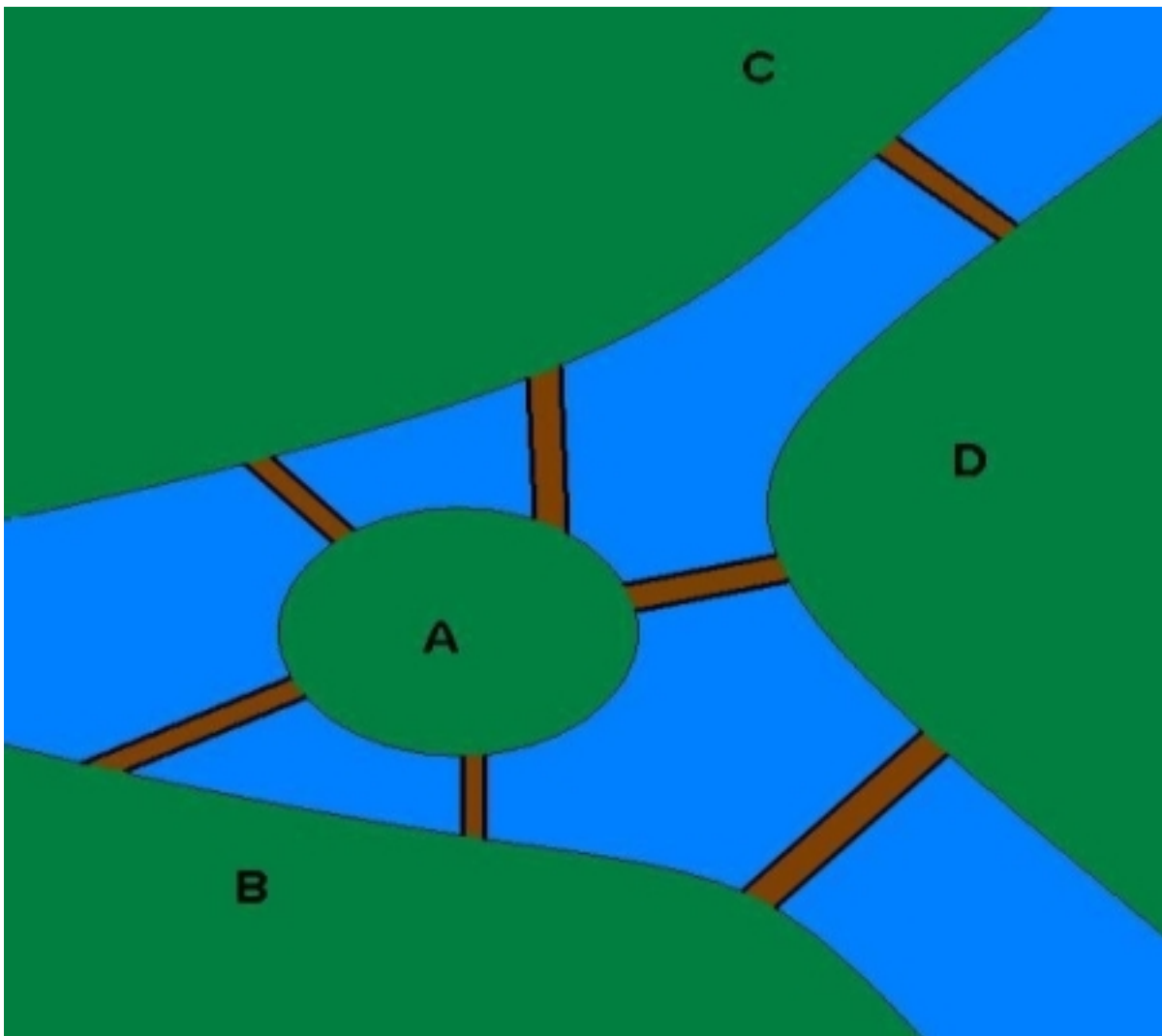
Mit einem Zug

Königsberger Brücken

Euler und die Königsberger Brücken.

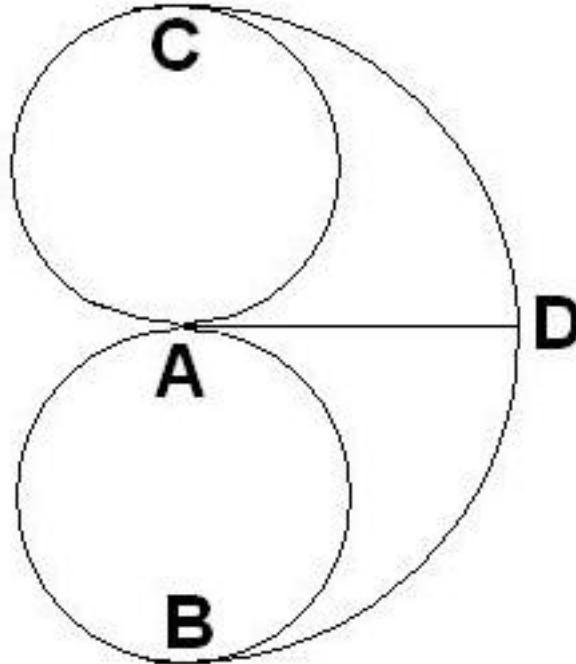
Eine besondere Aufgabe zog einmal die Aufmerksamkeit des genialen Mathematikers Euler auf sich. Er formulierte sie so (s. Abbildung): "In Königsberg (heute Kaliningrad) befindet sich eine Insel, der sogenannte Kneiphof. Der Fluß teilt sich dort in zwei Arme, über die sieben Brücken führen. Ist es möglich, jede Brücke genau einmal zu passieren?"

Einige behaupten, das sei möglich. Andere hingegen halten das für undurchführbar."



Lösung:

Der Anschaulichkeit halber ersetzen wir die Skizze mit der Anordnung der Brücken durch ein vereinfachtes Schema (s. folg. Abb.).



In der vorliegenden Aufgabe hat die Größe der Insel und die Länge der Brücken keinerlei Bedeutung. (Das ist, wie wir wissen, eine Besonderheit aller topologischen Aufgaben: sie sind unabhängig von den relativen Ausmaßen der Figur.) Deshalb können wir die Flächen A, B, C, D im obigen Schema durch Punkte mit der entsprechenden Bezeichnung ersetzen, in denen sich die Wege treffen. Die Aufgabe besteht jetzt, wie wir sehen, darin, diese Figur wie die in den Übungen 1 und 2 in ununterbrochener Linienführung zu zeichnen (ohne die Stift vom Papier zu lösen und ohne eine Linie doppelt zu ziehen).

Zeigen wir nun, dass die Figur nicht in einem Zug gezeichnet werden kann. Man muß in der Tat zu jedem der Knotenpunkte A, B, C, D auf einem der Wege kommen und den Punkt dann auf anderem Wege verlassen. Eine Ausnahme stellen nur der Ausgangs- und Endpunkt dar. Beim Ausgangspunkt braucht man von nirgendwoher zu kommen, beim Endpunkt ist keine Notwendigkeit, ihn zu verlassen. Also, die Möglichkeit des Begehens unserer Figur ohne Unterbrechung erfordert, dass in allen Knotenpunkten, außer zweien, entweder zwei oder vier - auf alle Fälle eine gerade Anzahl Wege - zusammentreffen.

In unserer Figur trifft sich jedoch in jedem der Punkte A, B, C, D eine ungerade Anzahl Linien. Deshalb kann man sie nicht in einem Zug zeichnen. Folglich ist es auch nicht möglich, in der geforderten Weise über die Königsberger Brücken zu gehen.