

Riesenzahlen

Die Legende vom Schachbrett

Schach ist eine der ältesten Spiele. Es existiert bereits viele Jahrhunderte, und so ist es nicht verwunderlich, dass mit ihm Legenden verbunden sind, deren Wahrheit nicht mehr überprüft werden kann.

Eine solche Legende kam uns zu Ohren und wir wollen sie Euch auch nicht verheimlichen. Um sie zu verstehen braucht man überhaupt kein Schachspieler zu sein. Es genügt zu wissen, dass das Schachbrett in 64 Felder aufgeteilt ist.



I. Das Schachspiel wurde in Indien erfunden. Als der indische Kaiser Sheraam sich damit vertraut machte, war er begeistert von seiner Scharfsinnigkeit und der Vielfalt der möglichen Situationen. Als er hörte, dass das Spiel von einem seiner Untertanen erdacht wurde, befahl der Kaiser ihn zu rufen, um ihn persönlich für die gute Idee zu belohnen. Der Erfinder, man nannte ihn Zeta, erschien am Thron des Gebieters.

Er war ein bescheiden gekleideter Gelehrter, der die Mittel für sein Lebensunterhalt von seinen Schülern erhielt.

"Ich möchte Dich Zeta für das ausgezeichnete Spiel, das Du Dir ausgedacht hast, würdig belohnen", sprach der Kaiser. Der Weise verneigte sich.

"Ich bin reich genug, um den kühnsten Deiner Wünsche zu erfüllen", fuhr der Kaiser fort.

"Nenne eine Belohnung, die Dich befriedigen kann, und Du erhältst sie". Zeta schwieg.

"Nur Mut", ermunterte ihn der Kaiser. "Äußere deinen Wunsch. Ich werde mit nichts geizen, um ihn zu erfüllen".

"Groß ist Deine Güte, Gebieter. Doch, gib mir Zeit bis morgen, die Antwort zu bedenken."

Als am anderen Morgen Zeta erneut vor dem Thron erschien, überraschte er den Kaiser mit der beispiellosen Bescheidenheit seiner Bitte.

"Gebieter", sagte Zeta, "befiehl mir für das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn."

"Ein einfaches Weizenkorn?", wunderte sich der Kaiser. "Ja, Gebieter. Für das zweite Feld befiehl, zwei Körner zu liefern, für das dritte - vier, für das vierte - acht, für das fünfte - 16, für das sechste - 32..."

"Genug", unterbrach ihn der Kaiser gereizt. "Du bekommst Deine Körner für alle 64 Felder des Bretts, gemäß Deines Wunsches, für jedes zweimal soviel wie für das vorhergehende. Doch wisse, dass Deine Bitte meiner Großmut unwürdig ist. Indem Du solche lächerliche Belohnung erbittest, mißsachtest Du unehrerbietig meine Gnade. Fürwahr, als Lehrer hättest Du ein besseres Beispiel der Achtung der Güte Deines Herrschers zeigen können. Geh! Meine Diener bringen Dir den Sack mit Weizen."

Zeta lächelte, verließ den Saal und wartete am Tor des Palastes.

II. Während des Mittagmahls erinnerte sich der Kaiser an den Erfinder des Schachspiels und schickte zu erkunden, ob der unvernünftige Zeta seine klägliche Belohnung schon weggetragen habe. "Gebierter", war die Antwort, "Dein Befehl wird ausgeführt. Die Hofmathematiker errechnen die Zahl der Körner".

Der Kaiser schaute ärgerlich drein. Er war nicht gewohnt, dass seine Anordnungen so schleppend ausgeführt wurden. Abends, als er sich zum Schlaf begab, erkundigte er sich noch einmal, ob Zeta mit seinem Sack Weizen schon die Mauer des Palastes verlassen habe.

"Gebierter", antwortete man ihm, "Deine Mathematiker arbeiten unermüdet und hoffen, bis zum Morgengrauen die Berechnung abzuschließen."

"Warum verzögert man diese Angelegenheit?!" rief der Kaiser wütend. "Morgen, ehe ich erwache, soll alles bis zum letzten Körnchen Zeta übergeben sein. Ein zweites Mal befehle ich nicht!"

Morgens erstattete man dem Kaiser Bericht, der Oberhofmathematiker bitte darum, eine wichtige Mitteilung anzuhören.

Der Kaiser gebot ihn hereinzuführen.

"Bevor Du über Deine Angelegenheit sprichst", erklärte Kaiser Sheram, "wünsche ich zu hören, ob dem Zeta nun endlich seine winzige Belohnung, die er selbst bestimmt hat, übergeben wurde."

"Ebendeshalb war ich so kühn, vor Dir zu so früher Stunde zu erscheinen", antwortete der Alte.

"Wir haben gewissenhaft die gesamte Menge Körner errechnet, die Zeta zu haben wünscht. Die Zahl ist derartig groß..."

"Wie groß sie auch sein mag", unterbrach ihn der Kaiser hochmütig, "meine Speicher werden davon nicht leer. Die Belohnung ist versprochen und muß ausgehändigt werden."

"Es ist nicht in Deiner Macht, Gebierter, einen derartigen Wunsch zu erfüllen.

In all Deinen Speichern ist die Anzahl von Körnern, die Zeta fordert, nicht vorhanden. Sie ist auch nicht in den Kornkammern des gesamten Reiches. Diese Anzahl Körner findet man nicht auf der ganzen weiten Erde. Und wenn Du unbedingt die zugesagte Belohnung aushändigen willst, so gebiete, das Erdreich in Ackerflächen zu verwandeln, gebiete, Meere und Ozeane trocken zu legen, befiehl, das Eis und den Schnee, womit die fernen, nördlichen Gebiete bedeckt sind, abzutauen. Mögen alle ihre Flächen mit Weizen bebaut werden. Und all das, was auf diesen Feldern gedeiht, gebiete, Zeta zu geben. Dann erhält er seine Belohnung."

Überrascht lauschte der Kaiser den Worten des Alten.

"Nenne mir die ungeheuerliche Zahl", sagte Kaiser Sheram nachdenklich.

"ACHTZEHN QUINTILLIONEN VIERHUNDERTSECHSUNDVIERZIG QUADRILLIONEN
SIEBENHUNDERTVIERUNDVIERZIG TRILLIONEN DREIUNDSIEBZIG BILLIONEN
SIEBENHUNDERTNEUN MILLIONEN FÜNFHUNDERTEINUNDFÜNFZIGTAUSEND
SECHSHUNDERTFÜNFZEHN - oh, Gebierter!"

III. Das ist die Legende. Ob das wirklich so gewesen ist, was hier erzählt wird, ist unbekannt.

Doch, dass die Belohnung, von der die Sage spricht, sich in eben dieser Zahl ausdrücken müßte, davon könnt ihr euch durch geduldiges Rechnen selbst überzeugen. Beginnend mit der Eins muß man die Zahlen 1, 2, 4, 8, usw. zusammenzählen. Das Ergebnis der 63. Verdoppelung zeigt wieviel dem Erfinder für das 64. Feld des Schachbretts zustand.

Wie man leicht herausfindet gilt für das 64. Feld die Multiplikation von 64 Zweien, also $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots$ usw. 64mal minus 1.

Zur Erleichterung der Berechnungen teilen wir die Multiplikatoren in sechs Gruppen zu 10 Zweien und eine letzte Gruppe mit vier Zweien. Das Produkt der 10 Zweien ist - wie man sich leicht

deSPA

denksportaufgaben

<http://www.warblow.de>

überzeugen kann - gleich 1024, und das der vier Zweien - 16. Also, das gesuchte Ergebnis ist gleich $1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16$. Multiplizieren wir 1024×1024 , erhalten wir 1 048 576. Jetzt bleibt $1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 16$ zu ermitteln, von dem Ergebnis Eins abziehen, und schon kennen wir die gesuchte Zahl:

18.446.744.073.709.551.615

Wenn ihr euch einen Begriff von der kolossalen Größe dieser Riesenzahl machen wollt, dann rechnet aus, welche Ausmaße ein Speicher haben müsste, um diese Menge von Körnern aufzunehmen. Es ist bekannt, dass ein Kubikmeter Weizen etwa 15 Millionen Körner umfasst. Die Belohnung für Zeta müsste ein Volumen von etwa 12.000.000.000.000 m³ oder $\hat{=}$ 12.000 km³ einnehmen. Bei einer Speicherhöhe von 4 m und einer Breite von 10 m würde sich seine Länge auf 300.000.000 km erstrecken. Das ist viel weiter als die Entfernung Erde - Sonne.

Der indische Kaiser war außerstande, eine derartige Belohnung zu erteilen. Doch wäre er in der Mathematik beschlagen gewesen, hätte er sich leicht von so einer lästigen Schuld freimachen können. Dazu hätte er Zeta nur zu empfehlen brauchen, sich selbst, Korn für Korn, den gesamten ihm zustehenden Weizen abzuzählen.

In der Tat würde Zeta diese Zählung Tag und Nacht ausführen müssen. Ein Korn pro Sekunde zählend, hätte er am ersten Tag insgesamt 86 400 Körner abgezählt. Um eine Million Körner zu zählen, wären nicht weniger als 10 Tage (und Nächte) unaufhaltsamen Zählens notwendig. Für 1 m³ Weizen bräuchte er etwa ein halbes Jahr. 400 bis 500 Zentner, wenn er pausenlos 10 lange Jahre zählt.

Ihr seht, dass Zeta, selbst wenn er sein ganzes weiteres Leben dem Zählen widmen würde; er würde nur einen kärglichen Teil der von ihm geforderten Belohnung erhalten.